



Universidade Federal do ABC

**Estágios Finais da Evolução Estelar:
Estrelas Compactas e Buracos Negros**

Felipe de Lima Kelemen

Orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2014

Universidade Federal do ABC

**Estágios Finais da Evolução Estelar:
Estrelas Compactas e Buracos Negros**

Relatório parcial de iniciação científica
com as informações do andamento do projeto,
realizado com bolsa PIBIC (Capes/Cnpq).

Autor: Felipe de Lima Kelemen
Orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2014

RESUMO

O presente relatório apresenta o andamento do projeto de iniciação científica realizado na UFABC sob orientação da prof. Dra. Cecilia Chirenti, com auxílio de bolsa da Capes/Cnpq. O objetivo principal da pesquisa é o estudo das características relativísticas de objetos compactos e densos como estrelas de nêutrons e buracos negros, bem como a introdução ao estudo de relatividade geral, e da estrutura do espaço-tempo que descreve um buraco negro. Inicia-se pela revisão e estudo de estrelas politrópicas relativísticas, seu colapso radial e indo até o estudo do espaço de Schwarzschild, seu horizonte de eventos e o paradoxo da informação, comparando os resultados computacionais obtidos com a literatura.

Palavras-Chave: *Relatividade, Astrofísica, Buracos Negros, Estrelas Politrópicas.*

ABSTRACT

The report presented here shows the development that has been made in this scientific initiation project in UFABC under supervising of Prof. Dr. Cecilia Chirenti, with Capes/Cnpq's financial support. The main objective of this research is the study of the relativistic characteristics present in compact objects such as neutron stars and black holes, together with an introductory study of general relativity, and the space time structure that describes a black hole. It begins with a review of the study of relativistic polytropic stars, its radial collapse and reaching the Schwarzschild's space metric, event horizons and information paradox, comparing computational results with previously read literature.

Keywords: Relativity, Astrophysics, Black Holes, Polytropic Stars.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	6
1.1.CRONOGRAMA	6
2.DESENVOLVIMENTO, RESULTADOS, E DISCUSSÃO	7
3.CONCLUSÃO	11
4.REFERÊNCIAS	13
APÊNDICE A	14

1.INTRODUÇÃO

Buracos negros vem sido objeto de estudo de muitos físicos nos últimos anos, devido às tantas possibilidades que surgem com a aplicação da teoria da relatividade geral de Einstein à sistemas que envolvem estes objetos astrofísicos, que pouco se pode descrever com a física atual, como, por exemplo, suas características e comportamentos internos, nos dando um vasto campo de estudo com muitas descobertas a serem feitas.

Nos estágios finais da evolução de uma estrela mais massiva que o Sol, quando todo seu combustível se esgota, ela explode, num evento chamado supernova. O resultado disso pode dar origem uma estrela de nêutrons ou a um buraco negro, que são corpos celestes supermassivos e superdensos e objetos de estudo dessa pesquisa.

O estudo do comportamento interno de estrelas de nêutrons e das influencias da sua presença num sistema binário de estrelas é o primeiro passo para o estudo da relatividade, que prevê a existência de buracos negros (objetos de maior foco na pesquisa), e permite a elaboração de teorias para as características de um buraco negro, como a singularidade central, o horizonte de eventos e o paradoxo da informação, também estudados neste projeto.

Os objetos da pesquisa são a introdução ao estudo da teoria da relatividade geral, com foco nas características astrofísicas mais importantes de um buraco negro. Visando aprendizado da teoria da relatividade geral aplicada a objetos astrofísicos compactos.

1.1 CRONOGRAMA

Este projeto possui a duração de 12 meses, de 01/03/2013 a 28/02/2014. O projeto está sendo desenvolvido de acordo com o seguinte cronograma:

01/08/2013 a 30/09/2013 Revisão da literatura e das equações de Tolamn-Oppenheimer-Volkoff da estrutura estelar.

01/10/2013 a 30/11/2013 Estudo do colapso radial de estrelas relativísticas.

01/12/2013 a 31/01/2014 Estudo introdutório de relatividade geral.

01/02/2014 a 31/03/2013 Elaboração do relatório parcial. Estudo da métrica da Schwarzschild.

01/04/2013 a 31/05/2013 Aplicações astrofísicas: influência do horizonte de eventos.

01/06/2014 a 31/07/2014 Comparação da teoria com objetos astrofísicos. Elaboração do relatório final.

2. DESENVOLVIMENTO, RESULTADOS E DISCUSSÃO

As equações para o equilíbrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)[1] descrevem a estrutura estelar, e são elas:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \quad (2)$$

Sendo p a pressão, $m(r)$ a massa da estrela até o raio r , e ρ a densidade de energia. A equação de estado politrópico da forma $p = p(\rho)$, completa o sistema de equações, onde:

$$p = \kappa\rho_c^{(1+1/n)} \quad (3)$$

Com a equação de estado (3) e os valores iniciais da densidade central (ou pressão central), massa (≈ 0) e pressão ($p(r=0) = p_c$) é possível modelar o sistema e resolvê-lo computacionalmente utilizando o programa escrito em linguagem C++ com implementação do método numérico Runge-Kutta de 4ª ordem [2].

Uma boa aproximação é feita utilizando o valor inicial da massa como sendo 0, apesar de não ser a realidade, estamos muito próximos do valor real. Uma aproximação melhor seria uma expansão em série de Taylor do resultado para valores de 0 até o valor inicial tomado no programa (0.001 [MSol]).

Variando os parâmetros κ e n , foram obtidos os seguintes resultados gráficos para os valores de massa e pressão, em função do raio da estrela.

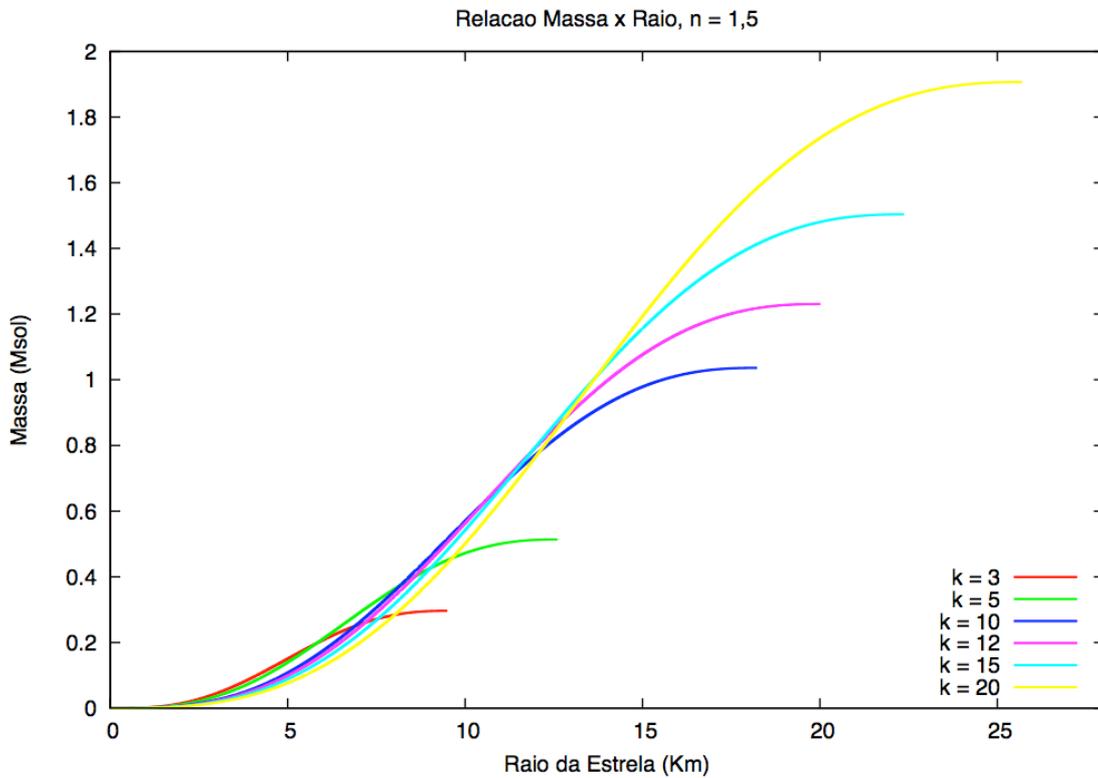


Figura 1: Relação entre a Massa da Estrela Politrópica até seu Raio, variando o parâmetro κ .

Utilizando $n = 1,5$ e variando o valor de κ , é observado que o valor da massa total da estrela cresce com o aumento de κ , para um mesmo n , com critério de parada a estabilidade radial da estrela, onde a taxa de variação da massa total pela densidade central deve ser positiva.

Pelo mesmo procedimento, agora mantendo κ constante ($= 9,55$, e sua unidade depende do valor de n , isolando-o na equação de estado) e variando n , temos que a massa total da estrela cresce para até um valor de $n = 3,0$ (que é o limite politrópico relativístico).

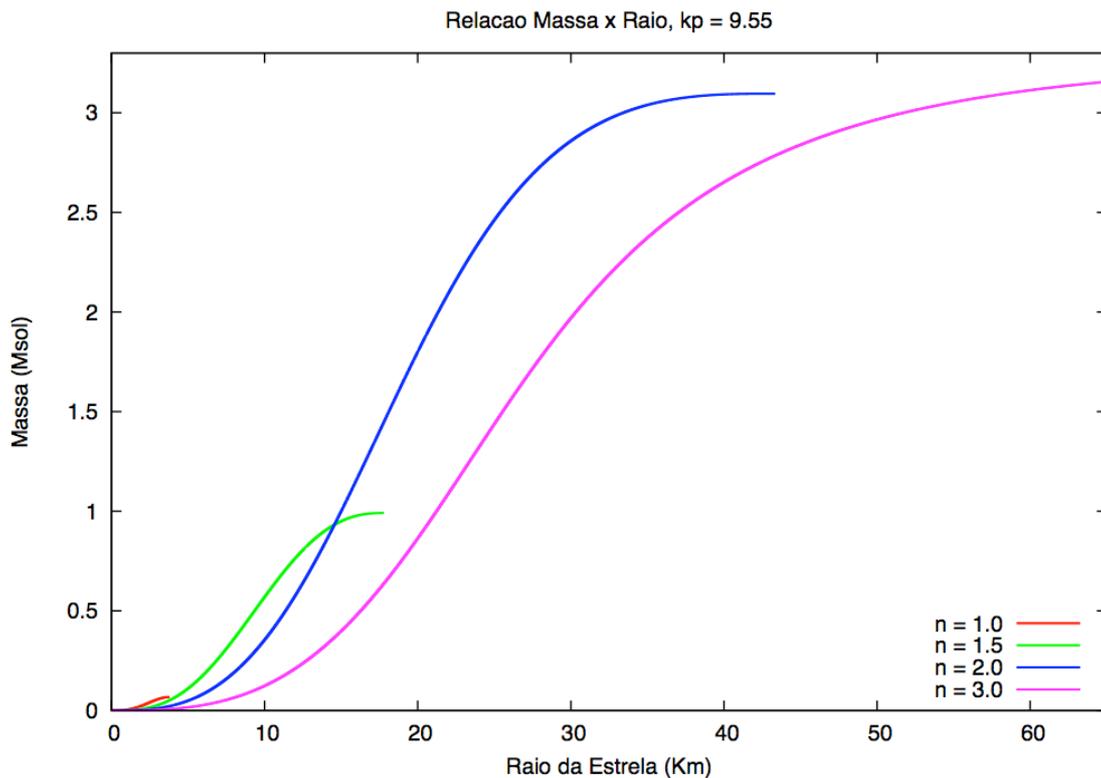


Figura 2: Relação entre Massa da estrela politrópica até seu Raio, variando $n \in [1.0; 3.0]$.

Para fazer uma análise completa do comportamento de estrelas politrópicas foi rodado o mesmo programa dez mil vezes acrescentando a cada vez o valor inicial da densidade central, mantendo os outros parâmetros, e o resultado foi que se observa uma massa máxima permitida para as estrelas relativísticas, que depende da sua equação de estado e dos parâmetros iniciais, principalmente da densidade central.

A região estável (na qual as estrelas que possuem este valor de massa total e raio total são estáveis) se encontra ao lado direito do ponto máximo de cada curva nas figuras (3 e 4). E isso significa que as estrelas à direita são muito instáveis e portanto, qualquer perturbação pode levar ao seu colapso radial, e estas serão as estrelas interessantes para o estudo (fortes candidatas a se tornarem buracos negros)[3].

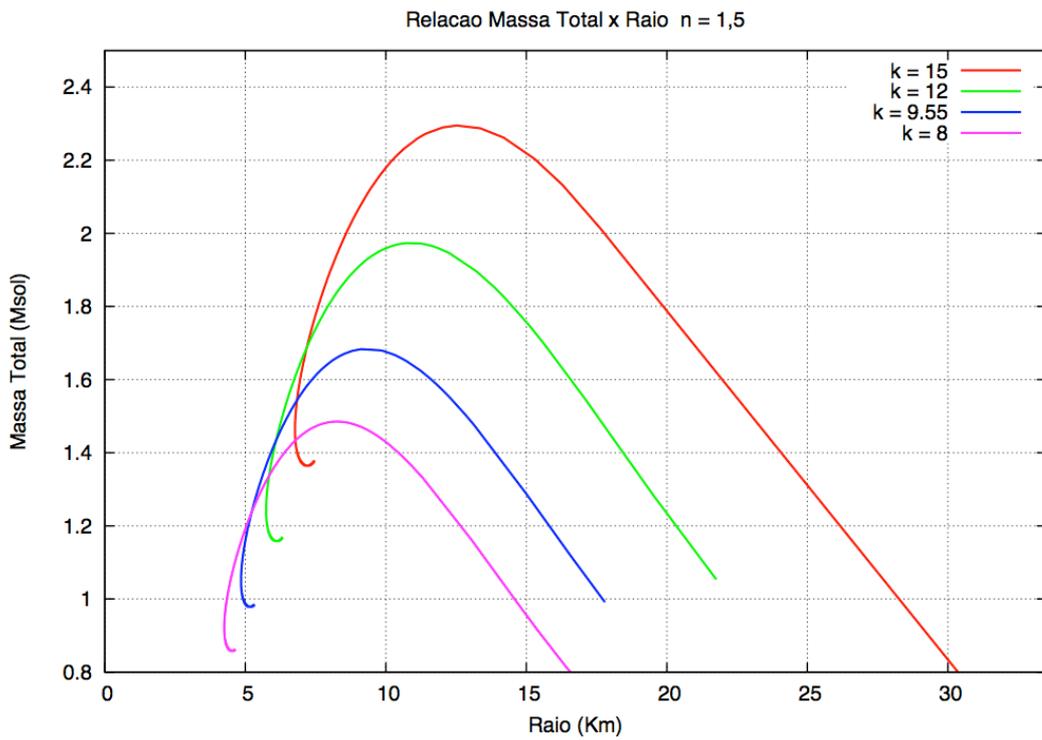


Figura 3: Massa total em função do raio total, alterando κ .

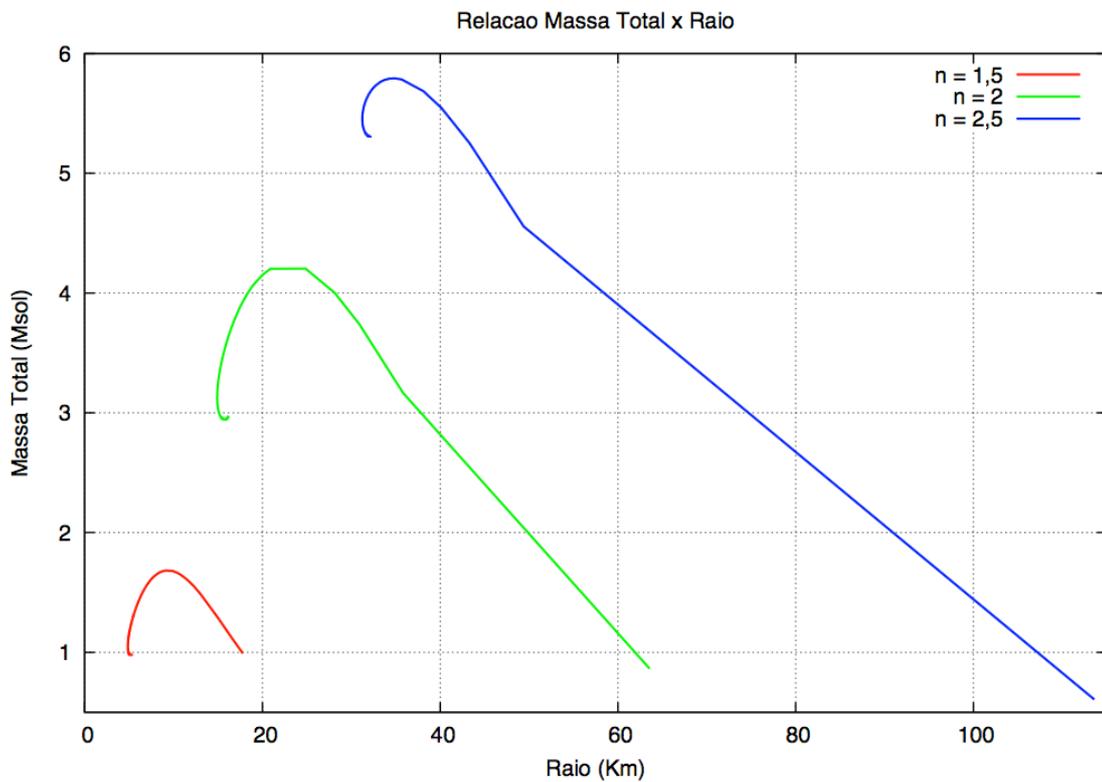


Figura 4: Massa total de uma estrela pelo seu Raio total, alterando os valores de n , $\kappa = 9.55$.

Os valores padrões utilizados para determinar as curvas das Figuras 3 (Curva Azul) e 4 (Curva Vermelha) são $n = 1.5$ e $\kappa = 9.55$, as outras curvas foram obtidas alterando os valores destes parâmetros na intenção de verificar visualmente o efeito que estes parâmetros tem na equação de estado da estrela. A massa total máxima para uma estrela com essa equação de estado e esses parâmetros foi calculada de 1.67 Massas Solares (MSol).

De acordo com o cronograma do projeto, os próximos passos e que já estão em andamento, são o estudo introdutório de relatividade geral, a métrica de Schwarzschild, e as aplicações astrofísicas, para a segunda parte do projeto.

3.CONCLUSÃO

Para uma estrela politrópica relativística, os valores numéricos para massa e pressão em função do raio, obtidos pela integração do sistema de equações de TOV, nos dão um valor máximo possível para a massa total e raio total de uma estrela. Devido a condição de estabilidade radial imposta, na qual $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$. O fator de pressão das estrelas impede com que ocorra seu colapso, estrelas muito compactas (densas) possuiriam um deficit de pressão para suprir sua contração gravitacional, portanto as estrelas à direita do ponto máximo permitido não são estáveis e uma pequena perturbação no seu equilíbrio levaria ao seu colapso, formando um buraco negro.

Os resultados gráficos foram obtidos com auxílio do software Gnuplot, e possibilitaram uma visualização dos resultados numéricos dos programas rodados. As figuras 1 e 2 mostram o comportamento de uma estrela politrópica com as condições iniciais descritas no texto e variação dos parâmetros n e κ . E indicam que a massa total de uma estrela (assim como seu raio) aumenta de acordo com a sua densidade central, e seu fator de pressão, pois possui energia e pressão suficiente para ser maior. Já as figuras 3 e 4 mostram que existe um limite máximo para o tamanho de uma estrela com os parâmetros iniciais fixados, ou seja, mesmos valores de n e κ , apenas com densidade central diferente, uma vez que aplicadas à condição limite de estabilidade radial. Variando estes parâmetros observa-se que esse valor máximo para a massa total da estrela varia para cada faixa de estrelas dentro dos limites relativísticos de n e κ .

Com o estudo de estrelas pulsantes, será possível verificar sua evolução e os efeitos de perturbações no equilíbrio à partir de métodos numéricos integrando as equações dinâmicas com as condições de fronteira e partir das equações de condições iniciais (Conservação Bariônica, Adiabaticidade, Conservação de Energia, e Equação de Campo de Einstein).

4.REFERÊNCIAS

- [1] B. Schutz, **Gravity from the ground up**: An introductory guide to gravity and general relativity, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [2] Press, W. H. , Teukolsky, S. A. , Vetterling W. T. , Flannery B. P. , **Numerical Recipes in C: The Art Of Scientific Computing**, Second Edition, Volume 1, Cambridge, 1992.
- [3] J. B. Hartle, **Gravity**, Addison Wesley, New York (2003).
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, **Gravitation**, W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco (1993).

APÊNDICE A

Trechos importantes do código do programa escrito em C++ para obter as curvas das Figuras 3 e 4 (obtidas com auxílio do software Gnuplot):

```
double f(double r, double m, double o)
{
    return (4*M_PI*o*pow(r,2)); //dM/dr
}

double g(double r, double m, double o)
{
    double p0 = 9E-06; // pressao central
    float n = 1.5;
    double kp1 = 9.55; // valor de kappa para n = 1.5
    double o0 = pow((p0/kp1), n1/(n1+1));
    double kp = p0/(pow(o0,(n+1)/n));
    double H,B,N,D,P;

    P = kp*pow(o,1+(1/n));
    D = kp*(1+(1/n))*pow(o,(1/n));
    H = o + P;
    B = m + 4*M_PI*pow(r,3)*P;
    N = r*(r-(2*m));

    return (-(H*B)/(D*N)); // dp/dr
}

int main(int argc, char *argv[]) //Implementacao do Runge-Kutta de quarta ordem para sistemas
{
    fstream fs;
    fs.open ("resultado_n25.dat", std::fstream::in
            | std::fstream::out | std::fstream::trunc); // escreve no arquivo

    //parametros
    double rn, rn1;
    double mn, mn1;
    double on, on1;
    double m0,r0,o0;
    double h,M,R,O,P,O1;
    double k1,k2,k3,k4;
    double l1,l2,l3,l4;
    int i;
    double p0 = 9E-06;
    float n1 = 1.5, n = 1.5;
    double kp1 = 9.55; // valor de kappa para n = 1.5
    double o01 = pow((p0/kp1), n1/(n1+1));
    double kp = p0/(pow(o01,(n+1)/n));
```

```

//condições iniciais
P = p0;
do {
    r0 = 0.001; // raio inicial
    m0 = 0; // massa inicial
    o0 = pow((P/kp), n1 / (n1+1)); // densidade central
    O = o0;
    h = 0.001; // passo
    rn = r0;
    mn = m0;
    on = o0;

    while(on > 0){ //se densidade < 0 para o programa

        k1 = h*f(rn,mn,on);
        l1 = h*g(rn,mn,on);

        k2 = h*f(rn+(h/2.0), mn+ (k1/2.0), on+ (l1/2.0));
        l2 = h*g(rn+(h/2.0), mn+ (k1/2.0), on+ (l1/2.0));

        k3 = h*f(rn + (h/2.0), mn + (k2/2.0), on+ (l2/2.0));
        l3 = h*g(rn + (h/2.0), mn + (k2/2.0), on+ (l2/2.0));

        k4 = h*f(rn +h, mn +k3, on + l3);
        l4 = h*g(rn +h, mn +k3, on + l3);

        rn1 = rn + h;
        mn1 = mn + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6.0;
        on1 = on + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4)/6.0;

        rn = rn1;
        mn = mn1;
        on = on1;
        M = mn;
        R = rn;
        O1 = M / (4*M_PI*pow(R,3));

    }

    if (M > 0) {
        fs << R << "\t" << M << "\t" << O1 << endl;
    }

    O += 0.0001; //acrescimo na densidade central
    P = kp*pow(O, (n1+1)/n1);
    i++;

} while (i < 10000);

fs.close();

return EXIT_SUCCESS;
}

```